

B1	B2	B3	B4	B5	B6
5	6	5	18	1100	15
B7	B8	B9	B10	B11	B12
2	60	45	7	2	10

C1 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{16^{\sin x} - 6 \cdot 4^{\sin x} + 8}{\log_2(1 - 2y)} = 0, \\ y = \cos x. \end{cases}$$

Решение.

Из уравнения $16^{\sin x} - 6 \cdot 4^{\sin x} + 8 = 0$ получаем: $4^{\sin x} = 2$ ли $4^{\sin x} = 4$, откуда $\sin x = \frac{1}{2}$ или $\sin x = 1$.

1) Пусть $\sin x = \frac{1}{2}$, тогда либо $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, и $y = \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{2}$ — не дает решения, поскольку в этом случае $1 - 2y < 0$,

либо $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ и $y = \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{1}{2}$.

2) Пусть $\sin x = 1$, тогда $y = \cos x = 0$ и, следовательно, $\log_2(1 - 2y) = 0$. В этом случае решений нет.

Ответ: $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

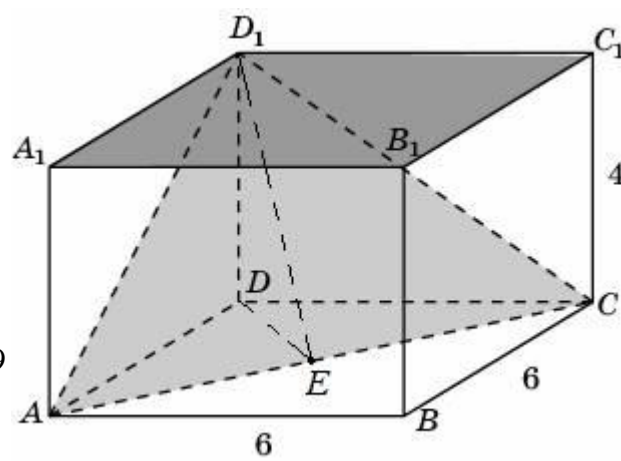
Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Получен ответ, возможно, неверный, но только из-за того, что в решении не учтено, что знаменатель дроби существует и отличен от нуля.	1
Обоснованно получен правильный ответ.	2

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 6$,

$BC = 6, CC_1 = 4$, найдите тангенс угла между плоскостями ACD_1 и $A_1 B_1 C_1$.

Решение.

Вместо плоскости $A_1 B_1 C_1$ возьмем параллельную ей плоскость ABC . Пусть E — середина AC .



$D_1E \perp AC$, $DE \perp AC$. Значит, угол DED_1 — линейный угол искомого угла. Из прямоугольного треугольника D_1DE находим:

$$\operatorname{tg} \angle DED_1 = \frac{DD_1}{DE} = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Обоснованно получен правильный ответ.	2

С3

Решите неравенство

$$\left(x + \frac{3}{x}\right) \cdot (\log_{(5-x)}(x^2 - 6x + 9))^2 \geq 4 \cdot (\log_{(5-x)}(x^2 - 6x + 9))^2.$$

Решение.

Решение неравенства ищем при условиях:
$$\begin{cases} x \neq 0, \\ 5 - x > 0, \\ 5 - x \neq 1, \\ x^2 - 6x + 9 > 0 \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x < 5, \\ x \neq 0, \\ x \neq 4, \\ x \neq 3. \end{cases}$$

Рассмотрим два случая:

1) $\log_{(5-x)}(x^2 - 6x + 9) = 0$, откуда $x^2 - 6x + 9 = 1$, т.е. $|x - 3| = 1$ и, значит, $x = 2$ или $x = 4$.

Значит, $x = 2$ — решение задачи.

2) $\log_{(5-x)}(x^2 - 6x + 9) \neq 0$, откуда $x^2 - 6x + 9 \neq 1$. Разделив обе части неравенства на $(\log_{(5-x)}(x^2 - 6x + 9))^2$, получим: $x + \frac{3}{x} \geq 4$, откуда

$$\frac{(x-1)(x-3)}{x} \geq 0. \text{ Решим это неравенство:}$$

$$0 < x \leq 1, \quad x \geq 3.$$

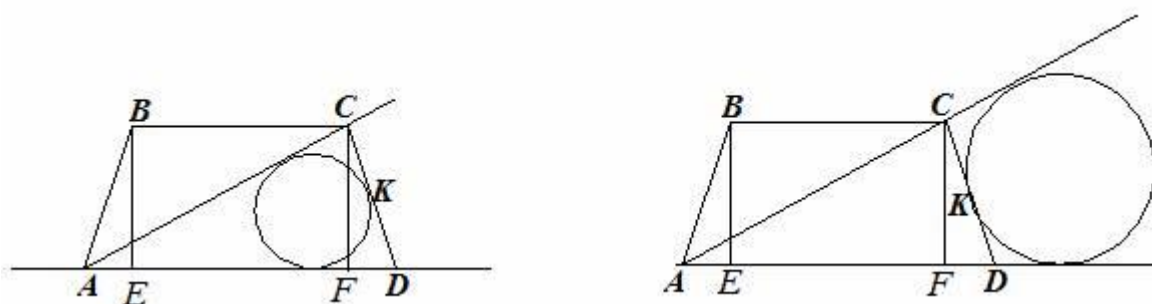
С учетом ограничений получаем: $0 < x \leq 1, x = 2, 3 < x < 4, 4 < x \leq 5$.

Ответ: $0 < x \leq 1, x = 2, 3 < x < 4, 4 < x < 5$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки.	1
Ответ или отличается от верного конечным числом точек, или при правильном рассуждении неверен из-за арифметической ошибки.	2
Обоснованно получен правильный ответ.	3

С4 Дана трапеция $ABCD$, основания которой $BC = 44$, $AD = 100$, $AB = CD = 35$. Окружность, касающаяся прямых AD и AC , касается стороны CD в точке K . Найдите длину отрезка CK .

Решение.



Найдем диагональ AC . Опустим из вершин B и C на сторону AD перпендикуляры BE и CF соответственно. $AE = FD$, так как трапеция равнобедренная. $BCFE$ – прямоугольник.

$$AE = \frac{100 - 44}{2} = 28, \quad BE = \sqrt{35^2 - 28^2} = 21,$$

$$AC = \sqrt{AF^2 + CF^2} = \sqrt{72^2 + 21^2} = 75.$$

Возможны две геометрические конфигурации.

Первый случай: окружность вписана в треугольник ACD .

$$CK = \frac{AC + CD - AD}{2} = \frac{75 + 35 - 100}{2} = 5.$$

Второй вариант: окружность касается продолжений сторон AC и AD за точками C и D соответственно и отрезка CD .

$$CK = \frac{AD + CD - AC}{2} = \frac{100 + 35 - 75}{2} = 30.$$

Ответ: 5 или 30.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3

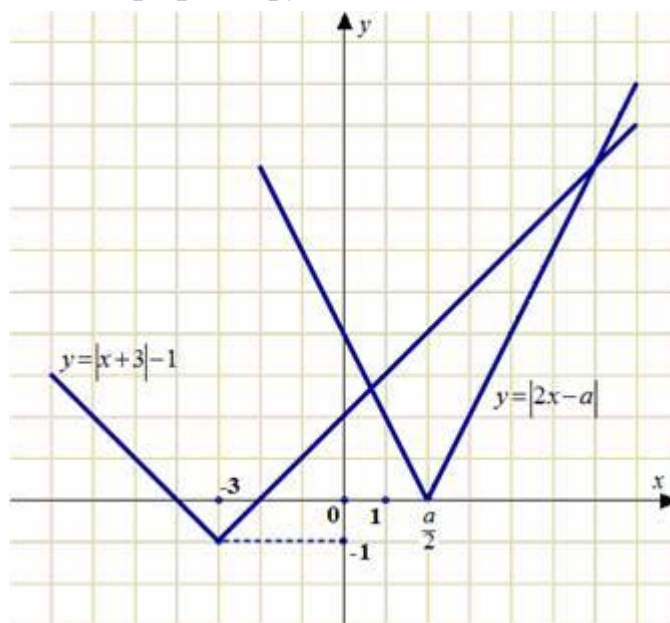
C5

Найдите все значения a , при каждом из которых решения неравенства $|2x - a| + 1 \leq |x + 3|$ образуют отрезок длины 1.

Решение.

Перенесем единицу: $|2x - a| \leq |x + 3| - 1$.

Построим схематично графики функций $y = |2x - a|$ и $y = |x + 3| - 1$.



На рисунке видно, что неравенство имеет решения только при $\frac{a}{2} \leq -4$

или $\frac{a}{2} \geq -2$.

$$1) \begin{cases} a \leq -8, \\ |2x - a| \leq -x - 4; \end{cases} \begin{cases} a \leq -8, \\ 2x - a \leq -x - 4, \\ 2x - a \geq x + 4; \end{cases} \begin{cases} a \leq -8, \\ x \leq \frac{a - 4}{3}, \\ x \geq a + 4. \end{cases}$$

Решения образуют отрезок длины 1, если $\frac{a-4}{3} - (a+4) = 1$, откуда $a = -\frac{19}{2}$.

$$2) \begin{cases} a \geq -4, \\ |2x - a| \leq x + 2; \end{cases} \begin{cases} a \geq -4, \\ 2x - a \leq x + 2, \\ 2x - a \geq -x - 2; \end{cases} \begin{cases} a \geq -4, \\ x \leq a + 2, \\ x \geq \frac{a-2}{3}. \end{cases}$$

Решения образуют отрезок длины 1, если $a + 2 - \frac{a-2}{3} = 1$, откуда $a = -\frac{5}{2}$.

Ответ: $a = -\frac{5}{2}, a = -\frac{19}{2}$.

Содержание критерия	Балл
Все ситуации, отличные от описанных ниже.	0
Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдены промежутки, содержащие правильные значения параметра.	1
Ответ неверен, но в решении представлена правильная графическая интерпретация или правильная аналитика.	2
Либо получен верный ответ, но при его обосновании допущены ошибки, либо обоснованно получен ответ, отличный от верного только из-за потери одного из значений параметра.	3
Обоснованно получен верный ответ.	4

C6

Найдите все пары целых чисел (x, y) , удовлетворяющие системе:

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + 24x - 28y + 167 < 0, \\ x + 2y < \frac{15}{2}. \end{cases}$$

Решение.

Выделяя полные квадраты, получаем:

$$\begin{cases} (x+6)^2 + (y-7)^2 < \frac{3}{2} = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2, \\ x + 2y < \frac{15}{2}, \\ x, y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Первое неравенство имеет пять пар решений:

$$(-6; 7), (-5; 7), (-6; 8), (-7; 7), (-6; 6).$$

Второму условию системы удовлетворяют только четвёртая и пятая пары.

Ответ: $(-7; 7), (-6; 6)$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Решения ищутся прямым перебором с ошибками. Ответ отсутствует или неверен.	1
Ответ неверен, однако есть попытка провести перебор с использованием геометрических или аналитических соображений.	2
Ответ неверен из-за арифметической ошибки, но правильно обозначена идея перебора основанная на выделении полного квадрата.	3
Обоснованно получен правильный ответ.	4