B1	**B2**	**B3**	**B4**	**B5**	**B6**
11	23	7	24	150	12
B7	**B8**	**B9**	**B10**	**B11**	**B12**
1	14	45	6,25	-11	40

C1 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{16^{\sin x} - 6 \cdot 4^{\sin x} + 8}{\log_2(1-2y)} = 0, \\ y = \cos x. \end{cases}$$

Решение.

Из уравнения $16^{\sin x} - 6 \cdot 4^{\sin x} + 8 = 0$ получаем: $4^{\sin x} = 2$ или $4^{\sin x} = 4$, откуда $\sin x = \frac{1}{2}$ или $\sin x = 1$.

1) Пусть $\sin x = \frac{1}{2}$, тогда либо $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$, и $y = \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{2}$ — не дает решения, поскольку в этом случае $1 - 2y < 0$,

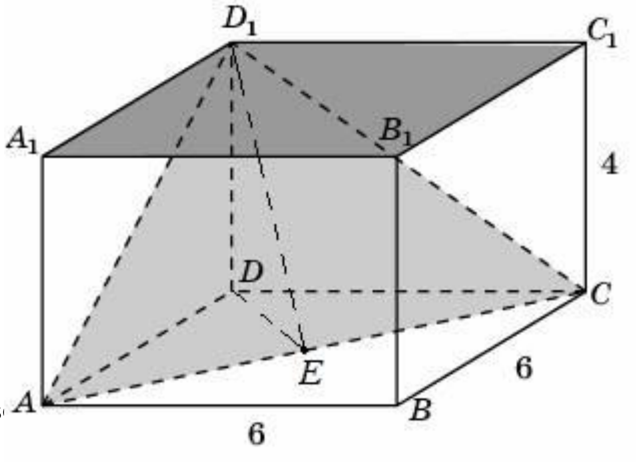
либо $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$, и $y = \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{1}{2}$.

2) Пусть $\sin x = 1$, тогда $y = \cos x = 0$ и, следовательно, $\log_2(1-2y) = 0$. В этом случае решений нет.

Ответ: $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Содержание критерия	**Балл**
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Получен ответ, возможно, неверный, но только из-за того, что в решении не учтено, что знаменатель дроби существует и отличен от нуля.	1
Обоснованно получен правильный ответ.	2

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 6$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$, найдите тангенс угла между плоскостями ACD_1 и $A_1B_1C_1$.



Решение.

Вместо плоскости $A_1B_1C_1$ возьмем параллельную ей плоскость

ABC. Пусть E — середина AC. $D_1E \perp AC$, $DE \perp AC$. Значит, угол DED_1 — линейный угол искомого угла. Из прямоугольного треугольника D_1DE находим:

$$\operatorname{tg}\angle DED_1 = \frac{DD_1}{DE} = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Обоснованно получен правильный ответ.	2

C3 Решите неравенство

$$\left(x+\frac{3}{x}\right)\cdot\left(\log_{(5-x)}\left(x^2-6x+9\right)\right)^2 \ge 4\cdot\left(\log_{(5-x)}\left(x^2-6x+9\right)\right)^2.$$

Решение.

Решение неравенства ищем при условиях:

$$\begin{cases} x \ne 0, \\ 5-x>0, \\ 5-x\ne 1, \\ x^2-6x+9>0 \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x<5, \\ x\ne 0, \\ x\ne 4, \\ x\ne 3. \end{cases}$$

Рассмотрим два случая:

1) $\log_{(5-x)}(x^2-6x+9)=0$, откуда $x^2-6x+9=1$, т.е. $|x-3|=1$ и, значит, $x=2$ или $x=4$.

Значит, $x=2$ — решение задачи.

2) $\log_{(5-x)}\left(x^2-6x+9\right)\ne 0$, откуда $x^2-6x+9\ne 1$. Разделив обе части неравенства на $\left(\log_{(5-x)}\left(x^2-6x+9\right)\right)^2$, получим:

$x+\dfrac{3}{x}\ge 4,$ откуда $\dfrac{(x-1)(x-3)}{x}\ge 0$.

Решим это неравенство: $0<x\le 1,\ \ x\ge 3$.

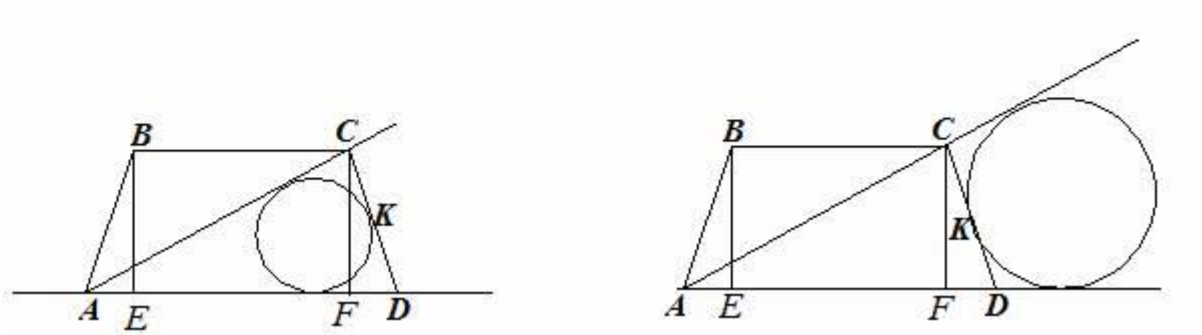
С учетом ограничений получаем: $0<x\le 1,\ x=2,\ 3<x<4,\ 4<x\le 5$.

Ответ: $0<x\le 1,\ x=2,\ 3<x<4,\ 4<x<5$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки.	1
Ответ или отличается от верного конечным числом точек, или при правильном рассуждении неверен из-за арифметической ошибки.	2
Обоснованно получен правильный ответ.	3

C4 Дана трапеция *ABCD*, основания которой $BC = 44$, $AD = 100$, $AB = CD = 35$. Окружность, касающаяся прямых *AD* и *AC*, касается стороны *CD* в точке *K*. Найдите длину отрезка *CK*.

Решение.



Найдем диагональ AC. Опустим из вершин *B* и *C* на сторону *AD* перпендикуляры *BE* и *CF* соответственно. *AE* = *FD*, так как трапеция равнобедренная. *BCFE* – прямоугольник.

$$AE = \frac{100-44}{2} = 28,\ BE = \sqrt{35^2 - 28^2} = 21,$$

$$AC = \sqrt{AF^2 + CF^2} = \sqrt{72^2 + 21^2} = 75.$$

Возможны две геометрические конфигурации.

Первый случай: окружность вписана в треугольник *ACD*.

$$CK = \frac{AC + CD - AD}{2} = \frac{75 + 35 - 100}{2} = 5.$$

Второй вариант: окружность касается продолжений сторон *AC* и *AD* за точками *C* и *D* соответственно и отрезка *CD*.

$$CK = \frac{AD + CD - AC}{2} = \frac{100 + 35 - 75}{2} = 30.$$

Ответ: 5 или 30.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых решения неравенства

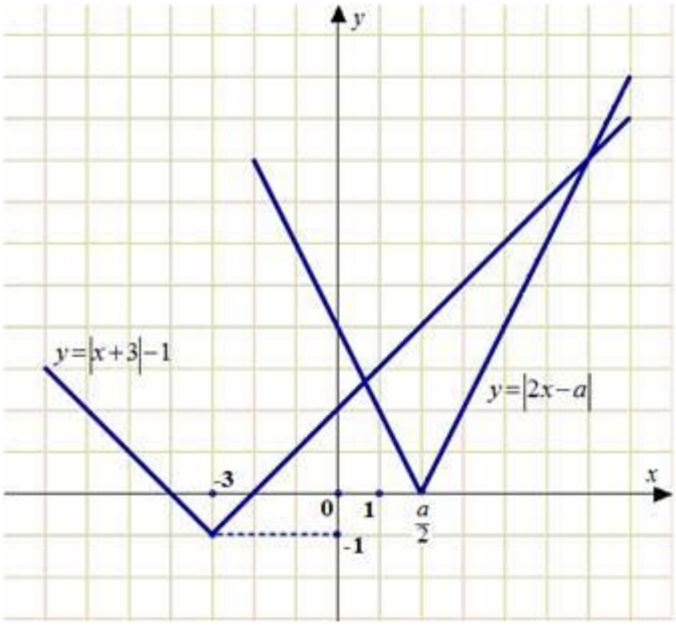
$$|2x-a|+1\le|x+3|$$

образуют отрезок длины 1.

Решение.

Перенесем единицу: $|2x-a|\le|x+3|-1$.

Построим схематично графики функций $y=|2x-a|$ и $y=|x+3|-1$.



На рисунке видно, что неравенство имеет решения только при $\frac{a}{2}\le-4$ или $\frac{a}{2}\ge-2$.

1) $\begin{cases} a\le-8, \\ |2x-a|\le-x-4; \end{cases}$ $\begin{cases} a\le-8, \\ 2x-a\le-x-4, \\ 2x-a\ge x+4; \end{cases}$ $\begin{cases} a\le-8, \\ x\le\dfrac{a-4}{3}, \\ x\ge a+4. \end{cases}$

Решения образуют отрезок длины 1, если $\frac{a-4}{3}-(a+4)=1$, откуда $a=-\frac{19}{2}$.

2) $\begin{cases} a \geq -4, \\ |2x-a| \leq x+2; \end{cases}$ $\begin{cases} a \geq -4, \\ 2x-a \leq x+2, \\ 2x-a \geq -x-2; \end{cases}$ $\begin{cases} a \geq -4, \\ x \leq a+2, \\ x \geq \frac{a-2}{3}. \end{cases}$

Решения образуют отрезок длины 1, если $a+2-\frac{a-2}{3}=1$, откуда $a=-\frac{5}{2}$.

Ответ: $a=-\frac{5}{2}$, $a=-\frac{19}{2}$.

Содержание критерия	**Балл**
Все ситуации, отличные от описанных ниже.	0
Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдены промежутки, содержащие правильные значения параметра.	1
Ответ неверен, но в решении представлена правильная графическая интерпретация или правильная аналитика.	2
Либо получен верный ответ, но при его обосновании допущены ошибки, либо обоснованно получен ответ, отличный от верного только из-за потери одного из значений параметра.	3
Обоснованно получен верный ответ.	4

C6 Найдите все пары целых чисел (x, y), удовлетворяющие системе:

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2+24x-28y+167<0, \\ x+2y<\frac{15}{2}. \end{cases}$$

Решение.

Выделяя полные квадраты, получаем:

$$\begin{cases} (x+6)^2+(y-7)^2<\frac{3}{2}=\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2, \\ x+2y<\frac{15}{2}, \\ x, y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Первое неравенство имеет пять пар решений:
$(-6; 7)$, $(-5; 7)$, $(-6; 8)$, $(-7; 7)$, $(-6; 6)$.

Второму условию системы удовлетворяют только четвёртая и пятая пары.

Ответ: $(-7;\ 7)$, $(-6;\ 6)$.

Содержание критерия	**Балл**
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Решения ищутся прямым перебором с ошибками. Ответ отсутствует или неверен.	1
Ответ неверен, однако есть попытка провести перебор с использованием геометрических или аналитических соображений.	2
Ответ неверен из-за арифметической ошибки, но правильно обозначена идея перебора основанная на выделении полного квадрата.	3
Обоснованно получен правильный ответ.	4