

B1	B2	B3	B4	B5	B6
4	4	9	21	700	18
B7	B8	B9	B10	B11	B12
275	-0,8	45	11	4	10

C1 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}{\sqrt{y}} = 0, \\ y - \cos x = 0. \end{cases}$$

Решение.

Из уравнения $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$ находим: $\sin x = \frac{1}{2}$ или $\sin x = 1$.

1) Пусть $\sin x = \frac{1}{2}$, тогда либо $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, и $y = \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$,

либо $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, и $y = \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$ — не дает решения.

2) Пусть $\sin x = 1$, тогда $y = \cos x = 0$ — не дает решения.

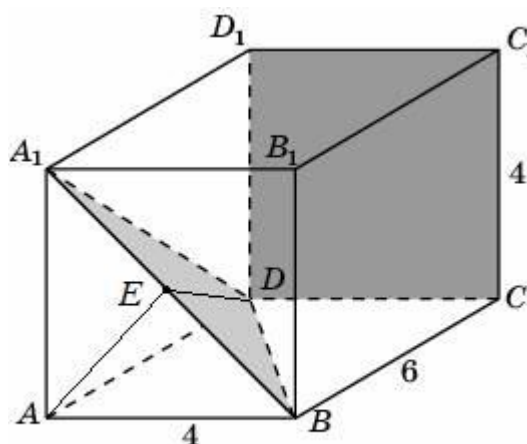
Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Получен ответ, возможно, неверный, но только из-за того, что в решении не учтено, что знаменатель дроби существует и отличен от нуля.	1
Обоснованно получен правильный ответ.	2

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 4$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$, найдите тангенс угла между плоскостями CDD_1 и BDA_1 .

Решение.

Вместо плоскости CDD_1 возьмем параллельную ей плоскость ABB_1 . Пусть E — середина BA_1 . $DE \perp BA_1$, $AE \perp BA_1$. Значит, угол DEA — линейный угол искомого угла. Из прямоугольного треугольника DAE находим:



$$\operatorname{tg} \angle DEA = \frac{AD}{AE} = \frac{6}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Обоснованно получен правильный ответ.	2

С3 Решите неравенство

$$\left(x + \frac{3}{x}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9} - 1}{\sqrt{5-x} - 1}\right)^2 \geq 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9} - 1}{\sqrt{5-x} - 1}\right)^2.$$

Решение.

Решение неравенства ищем при условиях: $\begin{cases} x \neq 0, \\ 5-x \geq 0, \\ 5-x \neq 1 \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x \leq 5, \\ x \neq 0, \\ x \neq 4. \end{cases}$

Рассмотрим два случая:

1) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 1$, т.е. $|x - 3| = 1$ и, значит, $x = 2$ или $x = 4$.

Значит, $x = 2$ — решение задачи.

2) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} \neq 1$. Разделив обе части неравенства на $\left(\frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9} - 1}{\sqrt{5-x} - 1}\right)^2$,

получим: $x + \frac{3}{x} \geq 4$, откуда $\frac{(x-1)(x-3)}{x} \geq 0$. Решим это неравенство:

$$0 < x \leq 1, \quad x \geq 3.$$

С учетом ограничений получаем: $0 < x \leq 1, x = 2, 3 \leq x < 4, 4 < x \leq 5$.

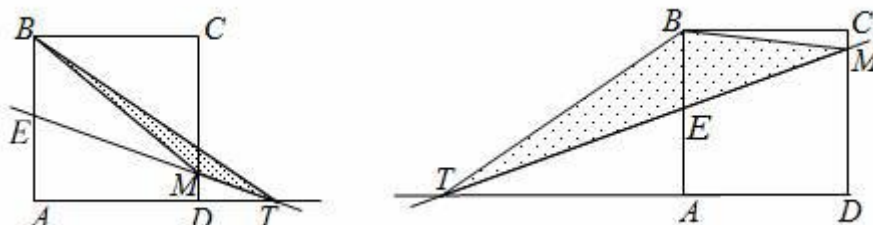
Ответ: $0 < x \leq 1, x = 2, 3 \leq x < 4, 4 < x \leq 5$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки.	1
Ответ или отличается от верного конечным числом точек, или при правильном рассуждении неверен из-за арифметической ошибки.	2
Обоснованно получен правильный ответ.	3

C4

Через середину стороны AB квадрата $ABCD$ проведена прямая, пересекающая прямые CD и AD в точках M и T соответственно и образующая с прямой AB угол α , $\operatorname{tg}\alpha = 3$. Найдите площадь треугольника BMT , если сторона квадрата $ABCD$ равна 4.

Решение.



Рассмотрим два случая (см. рис. 1 и рис. 2):

$$1) S_{\Delta BMT} = S_{\Delta BTE} - S_{\Delta BME} = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot AT - \frac{1}{2} \cdot BE \cdot AD =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot BE \cdot (AE \cdot \operatorname{tg}\alpha - AD) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2 \cdot 3 - 4) = 2.$$

$$2) S_{\Delta BMT} = S_{\Delta BTE} + S_{\Delta BME} = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot AT + \frac{1}{2} \cdot BE \cdot AD =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot BE \cdot (AE \cdot \operatorname{tg}\alpha + AD) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2 \cdot 3 + 4) = 10.$$

Ответ: 2 или 10.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3

C5

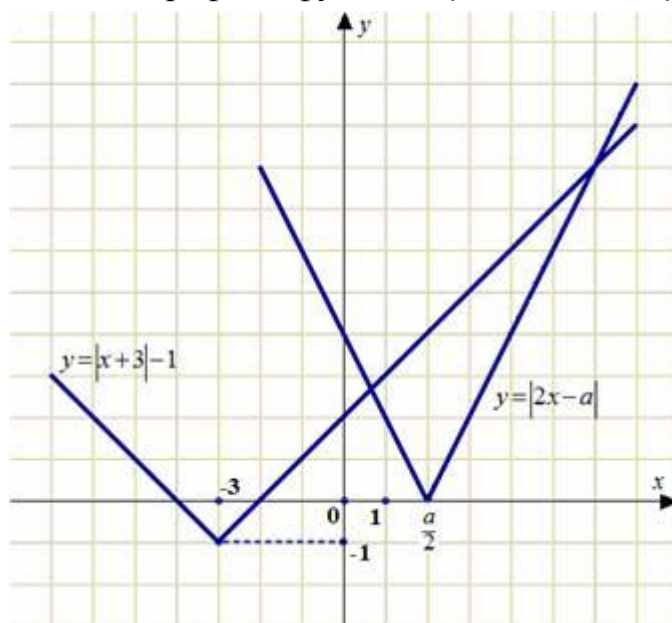
Найдите все значения a , при каждом из которых решения неравенства $|2x - a| + 1 \leq |x + 3|$ образуют отрезок длины 1.

Решение.

Перенесем единицу:

$$|2x - a| \leq |x + 3| - 1.$$

Построим схематично графики функций $y = |2x - a|$ и $y = |x + 3| - 1$.



На рисунке видно, что неравенство имеет решения только при $\frac{a}{2} \leq -4$

или $\frac{a}{2} \geq -2$.

$$1) \begin{cases} a \leq -8, \\ |2x - a| \leq -x - 4; \end{cases} \begin{cases} a \leq -8, \\ 2x - a \leq -x - 4, \\ 2x - a \geq x + 4; \end{cases} \begin{cases} a \leq -8, \\ x \leq \frac{a - 4}{3}, \\ x \geq a + 4. \end{cases}$$

Решения образуют отрезок длины 1, если $\frac{a - 4}{3} - (a + 4) = 1$, откуда

$$a = -\frac{19}{2}.$$

$$2) \begin{cases} a \geq -4, \\ |2x - a| \leq x + 2; \end{cases} \begin{cases} a \geq -4, \\ 2x - a \leq x + 2, \\ 2x - a \geq -x - 2; \end{cases} \begin{cases} a \geq -4, \\ x \leq a + 2, \\ x \geq \frac{a - 2}{3}. \end{cases}$$

Решения образуют отрезок длины 1, если $a + 2 - \frac{a-2}{3} = 1$, откуда $a = -\frac{5}{2}$.

Ответ: $a = -\frac{5}{2}$, $a = -\frac{19}{2}$.

Содержание критерия	Балл
Все ситуации, отличные от описанных ниже.	0
Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдены промежутки, содержащие правильные значения параметра.	1
Ответ неверен, но в решении представлена правильная графическая интерпретация или правильная аналитика.	2
Либо получен верный ответ, но при его обосновании допущены ошибки, либо обоснованно получен ответ, отличный от верного только из-за потери одного из значений параметра.	3
Обоснованно получен верный ответ.	4

C6

Найдите все пары $(x; y)$ целых чисел, удовлетворяющие системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 18x - 20y - 166, \\ 32x - y^2 > x^2 + 12y + 271. \end{cases}$$

Решение.

Выделяя полные квадраты, получаем:

$$\begin{cases} (x-9)^2 + (y+10)^2 < 15, \\ (x-16)^2 + (y+6)^2 < 21, \\ x, y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Из первого и второго неравенств системы:

$$\begin{cases} (x-9)^2 < 15, \\ (x-16)^2 < 21; \end{cases} \begin{cases} 6 \leq x \leq 12, \\ 12 \leq x \leq 20; \end{cases} \quad x = 12.$$

Подставляя $x = 12$ в систему, получаем:

$$\begin{cases} (y+10)^2 < 6, \\ (y+6)^2 < 5, \\ y \in \mathbb{Z}; \end{cases} \begin{cases} -2 \leq y+10 \leq 2, \\ -2 \leq y+6 \leq 2, \\ y \in \mathbb{Z}; \end{cases} \begin{cases} -12 \leq y \leq -8, \\ -8 \leq y \leq -4, \\ y \in \mathbb{Z}; \end{cases} \quad y = -8.$$

Ответ: $(12; -8)$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Решения ищутся прямым перебором с ошибками. Ответ отсутствует или неверен.	1
Ответ неверен, однако есть попытка провести перебор с использованием геометрических или аналитических соображений.	2
Ответ неверен из-за арифметической ошибки, но правильно обозначена идея перебора основанная на выделении полного квадрата.	3
Обоснованно получен правильный ответ.	4