

B1	B2	B3	B4	B5	B6
4	27	3	0,4	12160	12
B7	B8	B9	B10	B11	B12
216	1	45	2000	2	4

C1

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{2\sin^2 x + 3\sin x + 1}{\sqrt{-y}} = 0, \\ y = -\cos x. \end{cases}$$

Решение.

Из уравнения $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$ находим: $\sin x = -\frac{1}{2}$ или $\sin x = -1$.

1) Пусть $\sin x = -\frac{1}{2}$, тогда либо $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, и

$$y = -\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0,$$

либо $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ и $y = -\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$ — не дает решения.

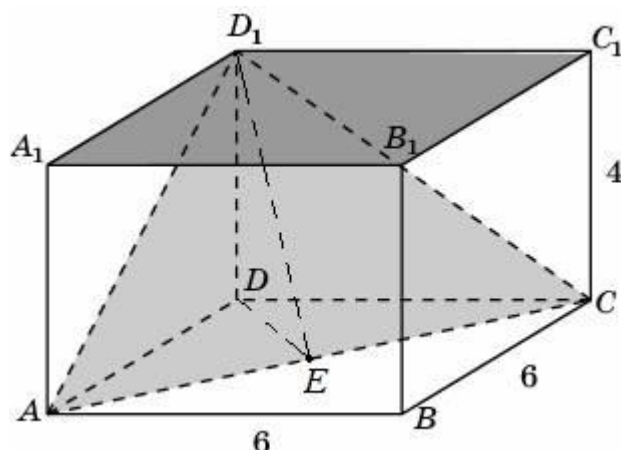
2) Пусть $\sin x = -1$, тогда $y = -\cos x = 0$ — не дает решения.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Получен ответ, возможно, неверный, но только из-за того, что в решении не учтено, что знаменатель дроби существует и отличен от нуля.	1
Обоснованно получен правильный ответ.	2

C2

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 6$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$, найдите тангенс угла между плоскостями ACD_1 и $A_1 B_1 C_1$.



Решение.

Вместо плоскости $A_1B_1C_1$ возьмем параллельную ей плоскость ABC . Пусть E — середина AC . $D_1E \perp AC$, $DE \perp AC$. Значит, угол DED_1 — линейный угол искомого угла. Из прямоугольного треугольника D_1DE

$$\text{находим: } \operatorname{tg} \angle DED_1 = \frac{DD_1}{DE} = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Обоснованно получен правильный ответ.	2

С3

Решите неравенство

$$\left(x + \frac{4}{x}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 - 8x + 16} - 1}{\sqrt{6-x} - 1}\right)^2 \geq 5 \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 - 8x + 16} - 1}{\sqrt{6-x} - 1}\right)^2.$$

Решение.

$$\text{Решение неравенства ищем при условиях: } \begin{cases} x \neq 0, \\ 6-x \geq 0 \\ 6-x \neq 1 \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} x \leq 6, \\ x \neq 0, \\ x \neq 5. \end{cases}$$

Рассмотрим два случая:

1) $\sqrt{x^2 - 8x + 16} = 1$, т.е. $|x - 4| = 1$ и, значит, $x = 3$ или $x = 5$.

Значит, $x = 3$ — решение задачи.

2) $\sqrt{x^2 - 8x + 16} \neq 1$. Разделив обе части неравенства на $\left(\frac{\sqrt{x^2 - 8x + 16} - 1}{\sqrt{6-x} - 1}\right)^2$, получим: $x + \frac{4}{x} \geq 5$, откуда $\frac{(x-1)(x-4)}{x} \geq 0$. Решим это

неравенство:

$$0 < x \leq 1, \quad x \geq 4.$$

С учетом ограничений получаем: $0 < x \leq 1, x = 3, 4 \leq x < 5, 5 < x \leq 6$.

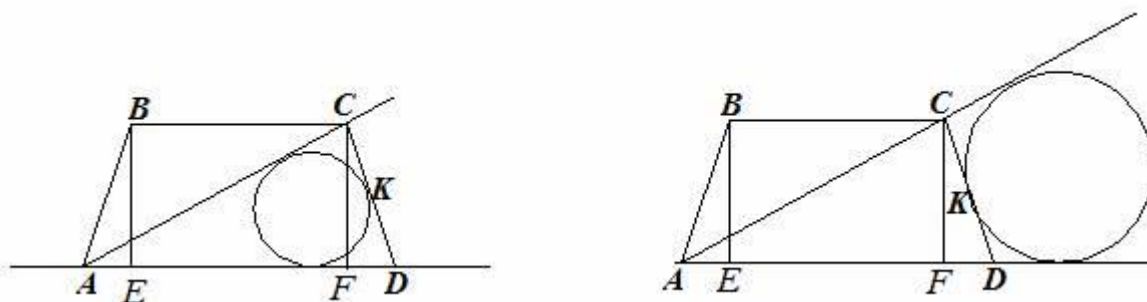
Ответ: $0 < x \leq 1, x = 3, 4 \leq x < 5, 5 < x \leq 6$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки.	1
Ответ или отличается от верного конечным числом точек, или при правильном рассуждении неверен из-за арифметической ошибки.	2
Обоснованно получен правильный ответ.	3

С4

Дана трапеция $ABCD$, основания которой $BC = 44$, $AD = 100$, $AB = CD = 35$. Окружность, касающаяся прямых AD и AC , касается стороны CD в точке K . Найдите длину отрезка CK .

Решение.



Найдем диагональ AC . Опустим из вершин B и C на сторону AD перпендикуляры BE и CF соответственно. $AE = FD$, так как трапеция равнобедренная. $BCFE$ – прямоугольник.

$$AE = \frac{100 - 44}{2} = 28, \quad BE = \sqrt{35^2 - 28^2} = 21,$$

$$AC = \sqrt{AF^2 + CF^2} = \sqrt{72^2 + 21^2} = 75.$$

Возможны две геометрические конфигурации.

Первый случай: окружность вписана в треугольник ACD .

$$CK = \frac{AC + CD - AD}{2} = \frac{75 + 35 - 100}{2} = 5.$$

Второй вариант: окружность касается продолжений сторон AC и AD за точками C и D соответственно и отрезка CD .

$$CK = \frac{AD + CD - AC}{2} = \frac{100 + 35 - 75}{2} = 30.$$

Ответ: 5 или 30.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3

C5

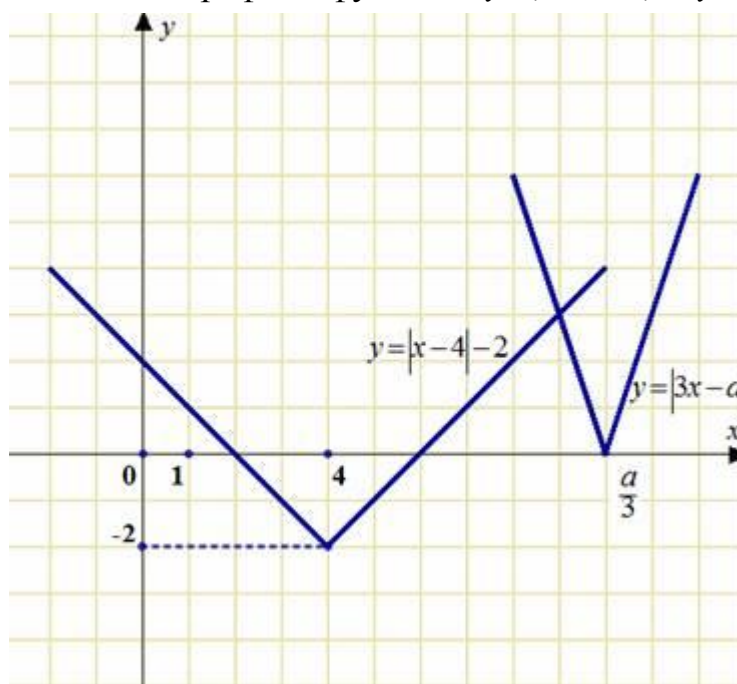
Найдите все значения a , при каждом из которых решения неравенства $|3x - a| + 2 \leq |x - 4|$ образуют отрезок длины 1.

Решение.

Перенесем двойку:

$$|3x - a| \leq |x - 4| - 2.$$

Построим схематично графики функций $y = |3x - a|$ и $y = |x - 4| - 2$.



На рисунке видно, что неравенство имеет решения только при $\frac{a}{3} \leq 2$ или

$$\frac{a}{3} \geq 6.$$

$$1) \begin{cases} a \leq 6 \\ |3x - a| \leq -x + 2; \end{cases} \begin{cases} a \leq 6, \\ 3x - a \leq -x + 2, \\ 3x - a \geq x - 2; \end{cases} \begin{cases} a \leq 6, \\ x \leq \frac{a+2}{4}, \\ x \geq \frac{a-2}{2}. \end{cases}$$

Решения образуют отрезок длины 1, если $\frac{a+2}{4} - \frac{a-2}{2} = 1$, откуда $a = 2$.

$$2) \begin{cases} a \geq 18, \\ |3x - a| \leq x - 6; \end{cases} \begin{cases} a \geq 18, \\ 3x - a \leq x - 6, \\ 3x - a \geq -x + 6; \end{cases} \begin{cases} a \geq 18, \\ x \leq \frac{a-6}{2}, \\ x \geq \frac{a+6}{4}. \end{cases}$$

Решения образуют отрезок длины 1, если $\frac{a-6}{2} - \frac{a+6}{4} = 1$, откуда $a = 22$.

Ответ: $a = 2, a = 22$.

Содержание критерия	Балл
Все ситуации, отличные от описанных ниже.	0
Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдены некоторые из искомых значений параметра.	1
Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдено хотя бы один верный интервал значений параметра.	2
Либо получен верный ответ, но при его обосновании допущены ошибки, либо обоснованно получен ответ, отличный от верного только из-за потери (приобретения) одного–двух искомых значений параметра.	3
Обоснованно получен верный ответ.	4

С6 Найдите все пары целых чисел (x, y) , удовлетворяющие системе:

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + 24x - 28y + 167 < 0, \\ x + 2y < \frac{15}{2}. \end{cases}$$

Решение.

Выделяя полные квадраты, получаем:

$$\begin{cases} (x+6)^2 + (y-7)^2 < \frac{3}{2} = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2, \\ x + 2y < \frac{15}{2}, \\ x, y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Первое неравенство имеет пять пар решений:

$(-6; 7)$, $(-5; 7)$, $(-6; 8)$, $(-7; 7)$, $(-6; 6)$.

Второму условию системы удовлетворяют только четвёртая и пятая пары.

Ответ: $(-7; 7)$, $(-6; 6)$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Решения ищутся прямым перебором с ошибками. Ответ отсутствует или неверен.	1
Ответ неверен, однако есть попытка провести перебор с использованием геометрических или аналитических соображений.	2
Ответ неверен из-за арифметической ошибки, но правильно обозначена идея перебора основанная на выделении полного квадрата.	3
Обоснованно получен правильный ответ.	4