

В1	В2	В3	В4	В5	В6
11	90	5	3	1774,5	24
В7	В8	В9	В10	В11	В12
23,4	11	45	1000	6	10

C1

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{81^{\cos x} - 12 \cdot 9^{\cos x} + 27}{\log_7(1+2y)} = 0, \\ y = \sin x. \end{cases}$$

Решение.

Из уравнения $81^{\cos x} - 12 \cdot 9^{\cos x} + 27 = 0$ получаем: $9^{\cos x} = 9$ или $9^{\cos x} = 3$, откуда $\cos x = 1$ или $\cos x = \frac{1}{2}$.

1) Пусть $\cos x = \frac{1}{2}$, тогда

$$\text{либо } x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \text{и } y = \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} > -\frac{1}{2}.$$

$$\text{либо } x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \text{и } y = \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} < -\frac{1}{2} \text{ — не дает решения,}$$

поскольку в этом случае $1 + 2y < 0$.

2) Пусть $\cos x = 1$, тогда $y = \sin x = 0$ и, следовательно, $\log_7(1+2y) = 0$. В этом случае решений нет.

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Получен ответ, возможно, неверный, но только из-за того, что в решении не учтено, что знаменатель дроби существует и отличен от нуля.	1
Обоснованно получен правильный ответ.	2

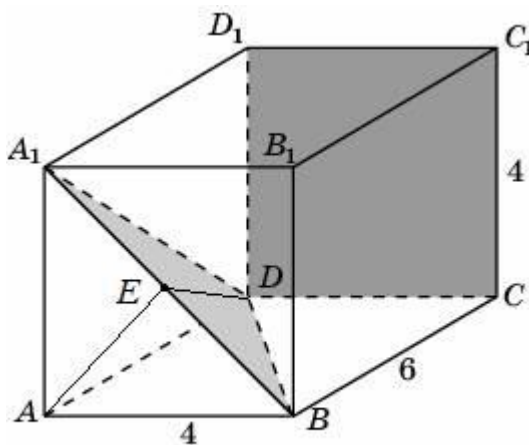
C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 4$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$, найдите тангенс угла между плоскостями CDD_1 и BDA_1 .

Решение.

Вместо плоскости CDD_1 возьмем параллельную ей плоскость ABB_1 . Пусть E — середина BA_1 . $DE \perp BA_1$, $AE \perp BA_1$. Значит, угол DEA — линейный угол искомого угла. Из прямоугольного треугольника DAE находим:

$$\operatorname{tg} \angle DEA = \frac{AD}{AE} = \frac{6}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.



Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Обоснованно получен правильный ответ.	2

C3 Решите неравенство

$$\left(x + \frac{4}{x}\right) \cdot \left(\log_{(6-x)}(x^2 - 8x + 16)\right)^2 \geq 5 \cdot \left(\log_{(6-x)}(x^2 - 8x + 16)\right)^2.$$

Решение.

Решение неравенства ищем при условиях:

$$\begin{cases} x \neq 0, \\ 6 - x > 0, \\ 6 - x \neq 1, \\ x^2 - 8x + 16 > 0 \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x < 6, \\ x \neq 0, \\ x \neq 5, \\ x \neq 4. \end{cases}$$

Рассмотрим два случая:

1) $\log_{(6-x)}(x^2 - 8x + 16) = 0$, откуда $x^2 - 8x + 16 = 1$, т.е. $|x - 4| = 1$ и, значит, $x = 3$ или $x = 5$.

Значит, $x = 3$ — решение задачи.

2) $\log_{(6-x)}(x^2 - 8x + 16) \neq 0$, откуда $x^2 - 8x + 16 \neq 1$. Разделив обе части неравенства на $(\log_{(6-x)}(x^2 - 8x + 16))^2$, получим: $x + \frac{4}{x} \geq 5$, откуда $\frac{(x-1)(x-4)}{x} \geq 0$. Решим это неравенство: $0 < x \leq 1, x \geq 4$.

С учетом ограничений получаем: $0 < x \leq 1, x = 3, 4 < x < 5, 5 < x \leq 6$.

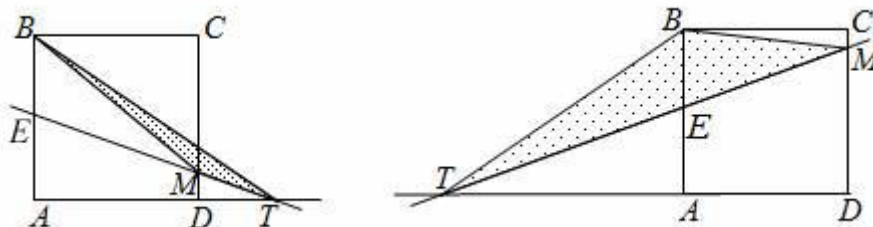
Ответ: $0 < x \leq 1, x = 3, 4 < x < 5, 5 < x < 6$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки.	1
Ответ или отличается от верного конечным числом точек, или при правильном рассуждении неверен из-за арифметической ошибки.	2
Обоснованно получен правильный ответ.	3

C4

Через середину стороны AB квадрата $ABCD$ проведена прямая, пересекающая прямые CD и AD в точках M и T соответственно и образующая с прямой AB угол α , $\operatorname{tg} \alpha = 3$. Найдите площадь треугольника BMT , если сторона квадрата $ABCD$ равна 4.

Решение.



Рассмотрим два случая (см. рис. 1 и рис. 2):

$$1) S_{\Delta BMT} = S_{\Delta BTE} - S_{\Delta BME} = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot AT - \frac{1}{2} \cdot BE \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot (AE \cdot \operatorname{tg} \alpha - AD) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2 \cdot 3 - 4) = 2.$$

$$2) S_{\Delta BMT} = S_{\Delta BTE} + S_{\Delta BME} = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot AT + \frac{1}{2} \cdot BE \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot (AE \cdot \operatorname{tg} \alpha + AD) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2 \cdot 3 + 4) = 10.$$

Ответ: 2 или 10.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3

C5

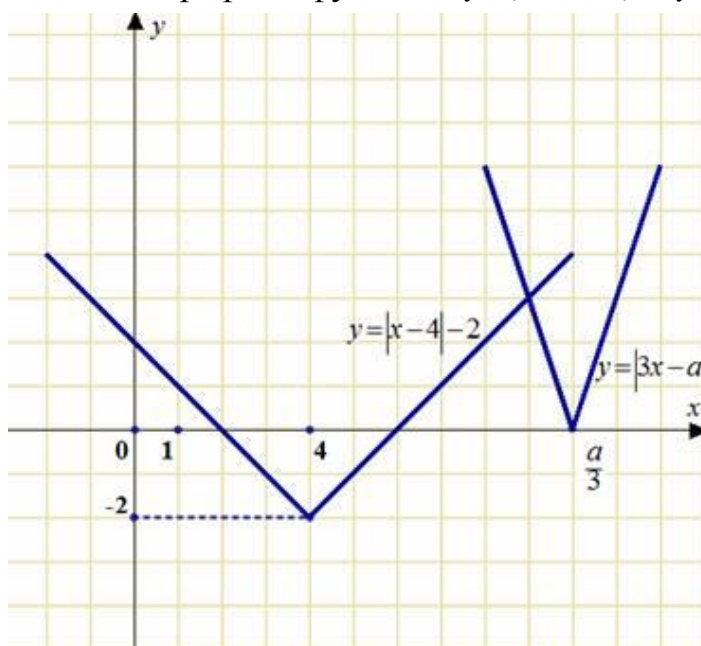
Найдите все значения a , при каждом из которых решения неравенства $|3x - a| + 2 \leq |x - 4|$ образуют отрезок длины 1.

Решение.

Перенесем двойку:

$$|3x - a| \leq |x - 4| - 2.$$

Построим схематично графики функций $y = |3x - a|$ и $y = |x - 4| - 2$.



На рисунке видно, что неравенство имеет решения только при $\frac{a}{3} \leq 2$ или

$$\frac{a}{3} \geq 6.$$

$$1) \begin{cases} a \leq 6 \\ |3x - a| \leq -x + 2; \end{cases} \begin{cases} a \leq 6, \\ 3x - a \leq -x + 2, \\ 3x - a \geq x - 2; \end{cases} \begin{cases} a \leq 6, \\ x \leq \frac{a+2}{4}, \\ x \geq \frac{a-2}{2}. \end{cases}$$

Решения образуют отрезок длины 1, если $\frac{a+2}{4} - \frac{a-2}{2} = 1$, откуда $a = 2$.

$$2) \begin{cases} a \geq 18, \\ |3x - a| \leq x - 6; \end{cases} \begin{cases} a \geq 18, \\ 3x - a \leq x - 6, \\ 3x - a \geq -x + 6; \end{cases} \begin{cases} a \geq 18, \\ x \leq \frac{a-6}{2}, \\ x \geq \frac{a+6}{4}. \end{cases}$$

Решения образуют отрезок длины 1, если $\frac{a-6}{2} - \frac{a+6}{4} = 1$, откуда $a = 22$.

Ответ: $a = 2, a = 22$.

Содержание критерия	Балл
Все ситуации, отличные от описанных ниже.	0
Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдены некоторые из искомых значений параметра.	1
Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдено хотя бы один верный интервал значений параметра.	2
Либо получен верный ответ, но при его обосновании допущены ошибки, либо обоснованно получен ответ, отличный от верного только из-за потери (приобретения) одного–двух искомых значений параметра.	3
Обоснованно получен верный ответ.	4

С6 Найдите все пары $(x; y)$ целых чисел, удовлетворяющие системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 18x - 20y - 166, \\ 32x - y^2 > x^2 + 12y + 271. \end{cases}$$

Решение.

Выделяя полные квадраты, получаем:

$$\begin{cases} (x-9)^2 + (y+10)^2 < 15, \\ (x-16)^2 + (y+6)^2 < 21, \\ x, y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Из первого и второго неравенств системы:

$$\begin{cases} (x-9)^2 < 15, \\ (x-16)^2 < 21; \end{cases} \begin{cases} 6 \leq x \leq 12, \\ 12 \leq x \leq 20; \end{cases} \quad x = 12.$$

Подставляя $x = 12$ в систему, получаем:

$$\begin{cases} (y+10)^2 < 6, \\ (y+6)^2 < 5, \\ y \in \mathbb{Z}; \end{cases} \begin{cases} -2 \leq y+10 \leq 2, \\ -2 \leq y+6 \leq 2, \\ y \in \mathbb{Z}; \end{cases} \begin{cases} -12 \leq y \leq -8, \\ -8 \leq y \leq -4, \\ y \in \mathbb{Z}; \end{cases} \quad y = -8.$$

Ответ: $(12; -8)$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Решения ищутся прямым перебором с ошибками. Ответ отсутствует или неверен.	1
Ответ неверен, однако есть попытка провести перебор с использованием геометрических или аналитических соображений.	2
Ответ неверен из-за арифметической ошибки, но правильно обозначена идея перебора основанная на выделении полного квадрата.	3
Обоснованно получен правильный ответ.	4