B1	B2	B3	B4	B5	B6
3	90	4	5	1592,5	35
B7	**B8**	**B9**	**B10**	**B11**	**B12**
6,5	7	45	1000	5	9

C1 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{81^{\cos x} - 12 \cdot 9^{\cos x} + 27}{\log_7(1+2y)} = 0, \\ y = \sin x. \end{cases}$$

Решение.

Из уравнения $81^{\cos x} - 12 \cdot 9^{\cos x} + 27 = 0$ получаем: $9^{\cos x} = 9$ или $9^{\cos x} = 3$, откуда $\cos x = 1$ или $\cos x = \dfrac{1}{2}$.

1) Пусть $\cos x = \dfrac{1}{2}$, тогда либо $x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, и $y = \sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} > -\dfrac{1}{2}$.

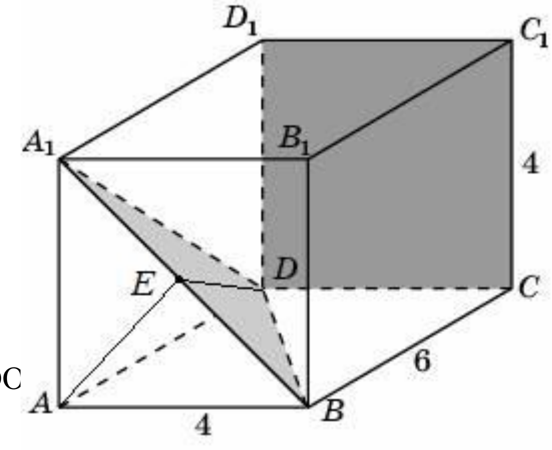
либо $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, и $y = \sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} < -\dfrac{1}{2}$ — не дает решения, поскольку в этом случае $1 + 2y < 0$.

2) Пусть $\cos x = 1$, тогда $y = \sin x = 0$ и, следовательно, $\log_7(1+2y) = 0$. В этом случае решений нет.

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Получен ответ, возможно, неверный, но только из-за того, что в решении не учтено, что знаменатель дроби существует и отличен от нуля.	1
Обоснованно получен правильный ответ.	2

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 4$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$, найдите тангенс угла между плоскостями CDD_1 и BDA_1.



Решение.

Вместо плоскости CDD_1 возьмем параллельную ей плоскость ABB_1. Пусть

E — середина BA_1. $DE \perp BA_1$, $AE \perp BA_1$. Значит, угол DEA — линейный угол искомого угла. Из прямоугольного треугольника DAE находим:

$$\mathrm{tg}\angle DEA = \frac{AD}{AE} = \frac{6}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Обоснованно получен правильный ответ.	2

C3 Решите неравенство

$$\left(x+\frac{4}{x}\right)\cdot\left(\log_{(6-x)}\left(x^2-8x+16\right)\right)^2 \geq 5\cdot\left(\log_{(6-x)}\left(x^2-8x+16\right)\right)^2.$$

Решение.

Решение неравенства ищем при условиях: $\begin{cases} x\neq 0,\\ 6-x>0,\\ 6-x\neq 1,\\ x^2-8x+16>0 \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x<6,\\ x\neq 0,\\ x\neq 5,\\ x\neq 4. \end{cases}$

Рассмотрим два случая:

1) $\log_{(6-x)}\left(x^2-8x+16\right)=0$, откуда $x^2-8x+16=1$, т.е. $|x-4|=1$ и, значит, $x=3$ или $x=5$.

Значит, $x=3$ — решение задачи.

2) $\log_{(6-x)}(x^2-8x+16)\neq 0$, откуда $x^2-8x+16\neq 1$. Разделив обе части неравенства на $\left(\log_{(6-x)}\left(x^2-8x+16\right)\right)^2$, получим: $x+\frac{4}{x}\geq 5$, откуда $\frac{(x-1)(x-4)}{x}\geq 0$. Решим это неравенство: $0<x\leq 1$, $x\geq 4$.

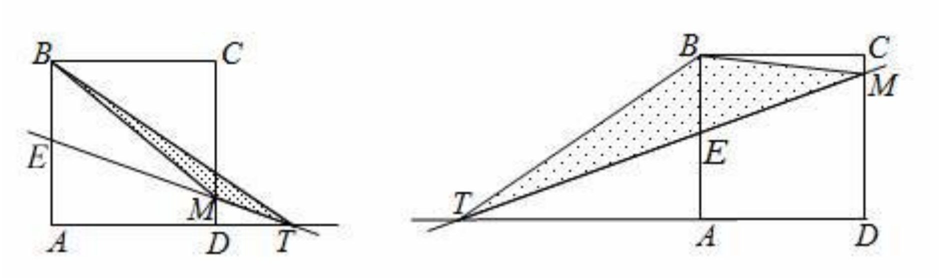
С учетом ограничений получаем $0<x\leq 1$, $x=3$, $4<x<5$, $5<x\leq 6$.

Ответ: $0<x\leq 1$, $x=3$, $4<x<5$, $5<x<6$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки.	1
Ответ или отличается от верного конечным числом точек, или при правильном рассуждении неверен из-за арифметической ошибки.	2
Обоснованно получен правильный ответ.	3

C4 Через середину стороны AB квадрата $ABCD$ проведена прямая, пересекающая прямые CD и AD в точках M и T соответственно и образующая с прямой AB угол α, $\operatorname{tg}\alpha = 3$. Найдите площадь треугольника BMT, если сторона квадрата $ABCD$ равна 4.

Решение.



Рассмотрим два случая (см. рис. 1 и рис. 2):

1) $S_{\Delta BMT} = S_{\Delta BTE} - S_{\Delta BME} = \frac{1}{2}\cdot BE\cdot AT - \frac{1}{2}\cdot BE\cdot AD =$

$= \frac{1}{2}\cdot BE\cdot (AE\cdot \operatorname{tg}\alpha - AD) = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot (2\cdot 3 - 4) = 2.$

2) $S_{\Delta BMT} = S_{\Delta BTE} + S_{\Delta BME} = \frac{1}{2}\cdot BE\cdot AT + \frac{1}{2}\cdot BE\cdot AD =$

$= \frac{1}{2}\cdot BE\cdot (AE\cdot \operatorname{tg}\alpha + AD) = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot (2\cdot 3 + 4) = 10.$

Ответ: 2 или 10.

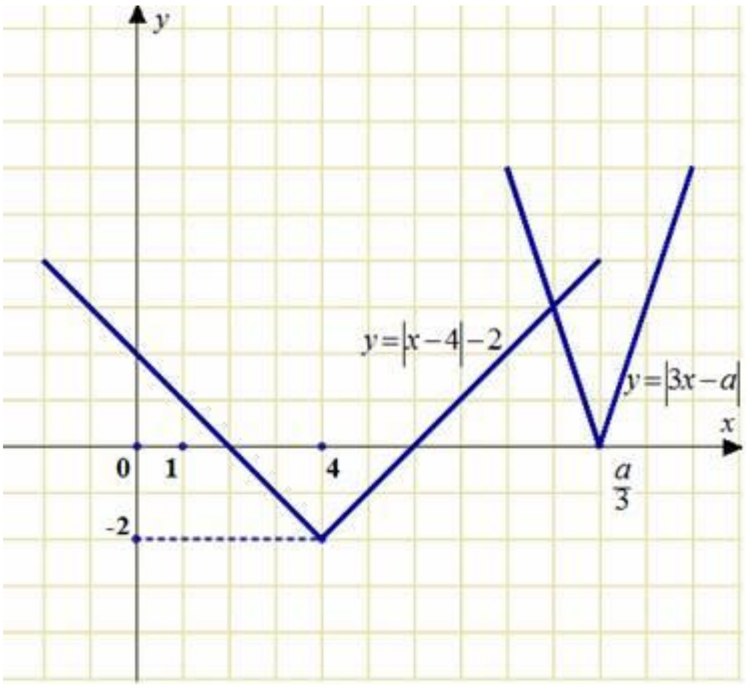
Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых решения неравенства $|3x-a|+2\le|x-4|$ образуют отрезок длины 1.

Решение.

Перенесем двойку: $|3x-a|\le|x-4|-2$.

Построим схематично графики функций $y=|3x-a|$ и $y=|x-4|-2$.



На рисунке видно, что неравенство имеет решения только при $\frac{a}{3}\le 2$ или $\frac{a}{3}\ge 6$.

1) $\begin{cases} a \le 6 \\ |3x - a| \le -x + 2; \end{cases}$ $\begin{cases} a \le 6, \\ 3x - a \le -x + 2, \\ 3x - a \ge x - 2; \end{cases}$ $\begin{cases} a \le 6, \\ x \le \dfrac{a+2}{4}, \\ x \ge \dfrac{a-2}{2}. \end{cases}$

Решения образуют отрезок длины 1, если $\dfrac{a+2}{4} - \dfrac{a-2}{2} = 1$, откуда $a = 2$.

2) $\begin{cases} a \ge 18, \\ |3x - a| \le x - 6; \end{cases}$ $\begin{cases} a \ge 18, \\ 3x - a \le x - 6, \\ 3x - a \ge -x + 6; \end{cases}$ $\begin{cases} a \ge 18, \\ x \le \dfrac{a-6}{2}, \\ x \ge \dfrac{a+6}{4}. \end{cases}$

Решения образуют отрезок длины 1, если $\dfrac{a-6}{2} - \dfrac{a+6}{4} = 1$, откуда $a = 22$.

Ответ: $a = 2,\ a = 22$.

Содержание критерия	Балл
Все ситуации, отличные от описанных ниже.	0
Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдены некоторые из искомых значений параметра.	1
Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдено хотя бы один верный интервал значений параметра.	2
Либо получен верный ответ, но при его обосновании допущены ошибки, либо обоснованно получен ответ, отличный от верного только из-за потери (приобретения) одного–двух искомых значений параметра.	3
Обоснованно получен верный ответ.	4

С6 Найдите все пары $(x; y)$ целых чисел, удовлетворяющие системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 18x - 20y - 166, \\ 32x - y^2 > x^2 + 12y + 271. \end{cases}$$

Решение.

Выделяя полные квадраты, получаем:

$$\begin{cases} (x-9)^2 + (y+10)^2 < 15, \\ (x-16)^2 + (y+6)^2 < 21, \\ x, y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Из первого и второго неравенств системы:

$$\begin{cases} (x-9)^2 < 15, \\ (x-16)^2 < 21; \end{cases} \begin{cases} 6 \le x \le 12, \\ 12 \le x \le 20; \end{cases} \quad x = 12.$$

Подставляя $x = 12$ в систему, получаем:

$$\begin{cases} (y+10)^2 < 6, \\ (y+6)^2 < 5, \\ y \in \mathbb{Z}; \end{cases} \begin{cases} -2 \le y+10 \le 2, \\ -2 \le y+6 \le 2, \\ y \in \mathbb{Z}; \end{cases} \begin{cases} -12 \le y \le -8, \\ -8 \le y \le -4, \\ y \in \mathbb{Z}; \end{cases} \quad y = -8.$$

Ответ: $(12; -8)$.

Содержание критерия	**Балл**
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Решения ищутся прямым перебором с ошибками. Ответ отсутствует или неверен.	1
Ответ неверен, однако есть попытка провести перебор с использованием геометрических или аналитических соображений.	2
Ответ неверен из-за арифметической ошибки, но правильно обозначена идея перебора основанная на выделении полного квадрата.	3
Обоснованно получен правильный ответ.	4